Тема 1.7. Комплексные числа

***Основное содержание модуля***

Комплексное число, мнимая единица, алгебраическая форма записи комплексного числа, тригонометрическая форма записи комплексного числа, показательная форма записи комплексного числа, модуль, аргумент, действия над комплексными числами, формула Муавра.

***Цели изучения:***

* формирование интереса к математике;
* расширение понятия числа;
* формирование понятия комплексного числа и действий над комплексными числами, заданными в алгебраической, тригонометрической, показательной формах;
* рассмотреть применение комплексных чисел в разных науках.

В результате изучения курса студенты должны:

***Уметь***:

* выполнять арифметические действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме, тригонометрической, показательной формах;
* переходить от записи числа в алгебраической форме к тригонометрической и обратно;
* решать квадратные уравнения с действительными коэффициентами.

***Ключевые компетенции***, формирование которых возможно в рамках образовательной области «математика», а именно:

-компетенции самосовершенствования, саморегулирования, саморазвития, личностной и предметной рефлексии;

-компетенции интеграции: структурирование знаний, расширение, приращение накопленных знаний;

-компетенции познавательной деятельности.

***Теоретический минимум***

***§1. Исторические сведения***

Если говорить об эволюции понятия числа, надо сказать, что не всегда первым толчком к расширению понятия числа были непосредственно практические потребности людей, в узком смысле этого слова. Комплексные числа, как и отрицательные, возникли из внутреннего развития математической науки, из практики решения алгебраических уравнений.

Уже в VII в.н.э. было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения – положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратные корни извлечь нельзя: нет такого числа х, чтобы х2 = -9.

В XVI веке в связи с изучением кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Первым учёным, предложившим ввести числа новой природы, был Джорж Кордано. Он предложил . Кордано назвал такие величины “чисто отрицательными” или даже “софистически отрицательными”, считая их бесполезными и стремился не применять их.

И всё-таки пришлось допустить такие корни в науку, когда другой итальянский учёный Бомбелли в 1572 году выпустил книгу, в которой были установлены первые правила арифметических операций над комплексными числами, вплоть до извлечения из них кубических корней.

Название “мнимые числа” ввёл в 1637году французский математик и философ Р. Декарт, а в 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века – Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова imaginare (мнимый) для обозначения числа (мнимой единицы); этот символ вошёл во всеобщее употребление.

В течение XVIII века продолжалось осуждение арифметической природы мнимостей, возможности дать им геометрическое истолкование.

Постепенно развилась техника операций над комплексными числами. На рубеже XVII – XVIII в.в. была построена общая теория корней n-й степени сначала из отрицательных, а потом из любых комплексных чисел, основанная на следующей формуле английского математика А. Муавра:  .

В конце XVIII начале XIX в. было получено геометрическое истолкование комплексных чисел. Датчанин Вессель, француз Арган и немец Гаусс независимо друг от друга предложили изображать комплексное число точкой М(а,в) на координатной плоскости. Позднее оказалось, что ещё удобнее изображать число не самой точкой, а вектором , идущим в эту точку из начала координат.

Большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли русские и советские ученые: Р.И. Мусхелишвили занимался ее приложениями к теории упругости, М.В. Келдыш и М.А. Лаврентьев - к аэродинамике и гидродинамике, Н. Н. Боголюбов и В.С. Владимиров - к проблемам квантовой теории поля.

В настоящее время комплексные числа используются в математике гораздо шире, чем действительные. С помощью комплексных чисел исследуется течение воды, полёт ракет и самолётов. Они применяются при вычерчивании географических карт, и многих других науках.

***§2. Комплексные числа и их геометрическая интерпретация***

*Комплексными числами* называются числа вида , где и – действительные числа, а число определяемое равенством называется *мнимой единицей*.

Если *a ≠ 0, b≠ 0,* то *z -*  мнимое число (*z = 97- i)*.

Если *a = 0, b ≠ 0,* то *z -*  чисто мнимое число (*z=55i)*.

Если *a≠0, b=0,*то *z -*  действительное число (*z=-4)*.

*Степени числа i:*

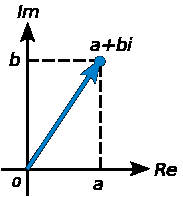
*i*1 = *i =>* *i4п+1 = i*

*i2= -1 => i4п+2 = -1*

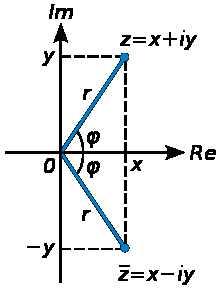
*i3= i2· i = - i => i4п+3=- i*

*i4 = ( i2)2 =1 => i4п=1*

Запись комплексного числа в виде называется *алгебраической формой записи* комплексного числа. Действительное число называется действительной частью (x=, а действительное число - мнимой частью (y = *Im z*).

Два комплексных числа , называются *равными*¸ если выполняется условие: и .

Комплексное число можно изображать точкой плоскости с координатами (a;b). При этом, действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которую называют действительной осью, а чисто мнимые числа – точками оси ординат, которую называют мнимой осью.

Каждой точке плоскости с координатами (a;b) соответствует один и только один вектор с началом в точке O(0;0) и концом в точке M(a;b). Поэтому комплексное число можно изобразить в виде вектора с началом в точке и концом в точке .

Комплексное число называется комплексно *сопряжённым* с числом и обозначается

Сумма и произведение двух сопряженных чисел являются действительными числами (*z+ =2а, z· = а2+**b2).*

Комплексные числа вида и называются *противоположными*.

*Модулем* комплексного числа называется число

.

Модуль комплексного числа всегда есть действительное неотрицательное число.

Угол φ между действительной осью Ox и вектором , отсчитываемый от положительного направления действительной оси, называется *аргументом* комплексного числа . Если отсчёт ведётся против движения часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по движению часовой стрелки, - отрицательной.

Главный аргумент комплексного числа записывается так: или и заключён в промежутке *.* Для числа аргумент не определён.

Аргумент можно найти, используя формулу .

;

Все значения аргумента числа определяются по формуле , .

***§3. Действия над комплексными числами***

* 1. ***Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме***

Над комплексными числами производятся такие же действия, как и над действительными числами.

;

;

;

.

* 1. ***Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме***

Запись числа в виде называется тригонометрической формой.

При умножении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются.

.

При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются.

.

*Формула Муавра* для возведения комплексных чисел в натуральную степень:

.

*Корень степени* из комплексного числа имеет различных значений, которые находятся по формуле:

*,* где

* 1. ***Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме***

Запись числа в виде называется *показательной* (экспоненциальной) формой комплексного числа. Она получается из тригонометрической формы заменой . Это соотношение носит название формула Эйлера.

Умножение, деление, возведение в целую положительную степень и извлечение корня целой положительной степени для комплексных чисел, заданных в показательной форме, выполняются по следующим формулам:

*,*

,

,

, где .

***Примеры решения задач***

Пример 1. Изобразите векторами комплексные числа: ; ; .

Решение.

х

у

О

-2

*φ*

х

у

О

2

2

*φ*

х

у

О

2

Пример 2. Для комплексного числа . Найти , , , .

Решение. Действительная часть , мнимая часть ,

Модуль числа найдём по формуле :

.

Аргумент числа найдём из уравнения , - главное значение аргумента. Тогда все значения аргумента: .

Пример 3. Найти , , , если , .

Решение.

1. .

Пример 4. Представьте число в тригонометрической форме, показательной форме.

Решение.

;

*, .*

Тригонометрическая форма комплексного числа:

.

Показательная форма комплексного числа:

.

Пример 5. Найти .

Решение.

,

*.*

Тригонометрическая форма числа

.

По формуле Муавра имеем

.

Пример 6. Решить уравнение на множестве комплексных чисел.

Решение. Перепишем уравнение в виде . Число (-8) представим в тригонометрической форме: . Тогда по формуле нахождения корня из комплексного числа имеем

, где .

Полагая, что , получим

.

.

.

Пример 7. Решить уравнение на множестве комплексных чисел.

Решение. Решением уравнения является .

Пример 8. Изобразить на комплексной плоскости множество точек 

Решение. Так как z=x+y*·i*, xR, yR, то

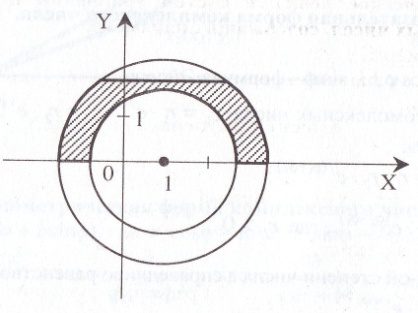
а) первое условие примет вид:

.

Это множество точек, лежащих внутри и на границе кольца между окружностями с центром (1;0) и радиусами, равными 2 и 3;

б) второе условие примет вид: искомое множество есть часть кольца, ограниченная отрезками прямых: y=0 и y=.

Решение данной системы есть следующее множество точек, изображенных на плоскости:



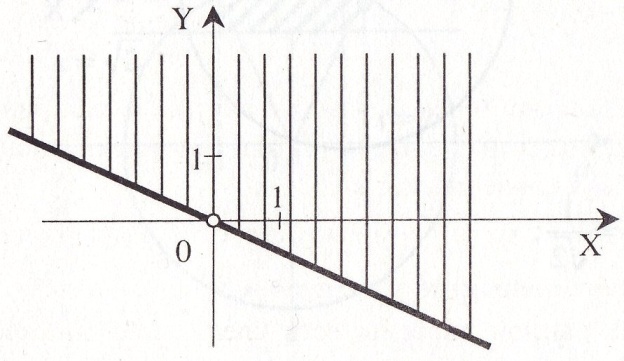
Пример 9. Изобразить на комплексной плоскости множество точек .

Решение. Так как z = x + y · i, то



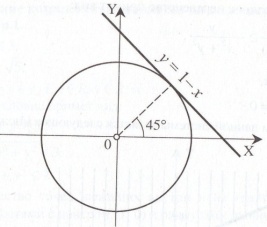
Тогда исходное неравенство примет вид: 

Решением данной системы является следующее множество точек:



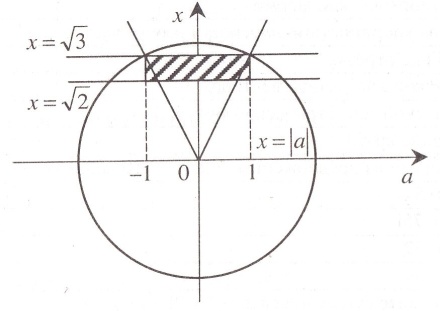
Пример 10. При каких значениях параметра *а* система уравнений имеет единственное решение?

Решение.

 Так как z = x + y · i, то система будет выглядеть следующим образом: . Графиком функции y = 1 – x является прямая, проходящая через точки (0;1) и (1;0), а график *x2 + y2 = a* представляет собой окружность с радиусом . Система уравнений будет иметь единственное решение только в том случае, когда прямая, заданная функцией y = 1 – x будет касательной к окружности с радиусом 

Итак, при  система уравнений имеет единственное решение.

Пример 11. При каких значениях параметра *а* система неравенств выполняется для всех *х* на отрезке ?

Решение. Так как z = x + y · i, то система  будет выглядеть следующим образом: . Для решения системы неравенств воспользуемся графическим методом. Введём прямоугольную систему координат и обозначим вертикальную ось ОХ, а горизонтальную – О*а.*

Решением данной системы неравенств является множество точек, заключенных внутри окружности, заданной уравнением , и в то же время находящимися между прямыми , а так же лежащие не ниже точек графика, заданного функцией .

Данные чертежа наглядно иллюстрируют решение системы неравенств: .

***Тест контроля знаний по теме «Комплексные числа»***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***№***  ***п/п*** | ***Вопросы и варианты ответов*** | ***Ответы*** |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | ***Сколько форм записи имеет комплексное число?*** |  |
| а) 1 |
| б) 2 |
| в) 3 |
| г) 4 |
| 2 | ***Что представляет собой число i?*** |  |
| а) число, квадратный корень из которого равен – 1 |
| б) число, квадрат которого равен – 1 |
| в) число, квадратный корень из которого равен 1 |
| г) число, квадрат которого равен 1 |
| 3 | ***Формулу Муавра можно применять, если комплексное число записано:*** |  |
| а) в показательной форме |
| б) наглядной форме |
| в) тригонометрической форме |
| г) алгебраической форме |
| 4 | ***Формулу Эйлера можно применять, если комплексное число записано:*** |  |
| а) в показательной форме |
| б) наглядной форме |
| в) тригонометрической форме |
| г) алгебраической форме |
| 5 | ***Как на координатной плоскости изображается комплексное число?*** |  |
| а) в виде отрезка |
| б) точкой или радиус-вектором |
| в) плоской геометрической фигурой |
| г) в виде круга |
| 6 | ***Выберите из предложенных чисел чисто мнимое:*** |  |
| а) z = 6+ 3i |
| б) z = 5i |
| в) z = 0 |
| г) z = 15 |
| 7 | ***Вычислите сумму чисел z1 = 7 + 2i и z2 = 3 + 7i:*** |  |
| а) 10 + 9i |
| б) 4 – 5i |
| в) 10 – 5i |
| г) 4 + 5i |
| 8 | ***Как выглядит тригонометрическая форма числа*** |  |
| а) это радиус-вектор |
| б) |
| в) z = 3 – 4i |
| г) это точка на координатной плоскости |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |
| 9 | ***В какое множество входят числа 5; 5-6i; 0,7; -2i?*** |  |
| а) действительные числа |
| б) рациональные числа |
| в) комплексные числа |
| г) иррациональные числа |
| 10 | ***Кто ввёл название «мнимые числа»?*** |  |
| а) Декарт |
| б) Арган |
| в) Эйлер |
| г) Кардано |
| 11 | ***Комплексные числа z=a-bi и z=a+bi называются …*** |  |
| а) взаимообратными |
| б) противоположными |
| в) сопряжёнными |
| г) пропорциональными |
| 12 | ***Комплексные числа z=a+bi и z=-a-bi называются …*** |  |
| а) взаимообратными |
| б) противоположными |
| в) сопряжёнными |
| г) пропорциональными |
| 13 | ***Число называется …*** |  |
| а) корнем квадратного уравнения на поле комплексных чисел |
| б) аргументом комплексного числа |
| в) коэффициентом пропорциональности |
| г) модулем комплексного числа |
| 14 | ***Соотношение вида называется***  ***формулой …*** |  |
| а) Эйлера |
| б) Гаусса |
| в) Ньютона - Лейбница |
| г) Карно |
| 15 | ***Запись вида называется …*** |  |
| а) показательной функцией |
| б) формулой Муавра |
| в) показательной формой комплексного числа |
| г) формулой Эйлера |

|  |  |
| --- | --- |
| ***Критерии оценок*** | |
| ***Количество***  ***набранных балов*** | ***оценка*** |
| 0 - 9 | 2 |
| 10 -11 | 3 |
| 12 - 13 | 4 |
| 14 - 15 | 5 |

***упражнения***

1. Построить на комплексной плоскости векторы, соответствующие комплексным числам:
   1. ;
   2. ;
   3. ;
   4. ;
   5. ;
   6. ;
   7. ;
   8. .
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел:
   1. ;
   2. ;
   3. ;
   4. .
3. Найти модуль, главное значение аргумента и все значения аргумента комплексных чисел:
   1. ;
   2. ;
   3. ;
   4. ;
   5. ;
   6. ;
   7. ;
   8. .
4. Для заданных чисел назовите числа, сопряжённые и противоположные данным:
   1. ;
   2. ;
   3. ;
5. Дана точка, изображающая число . Какие числа изображают точки, симметричные данной относительно действительной оси? мнимой оси; начала координат?
6. Чему равен аргумент: 1) чисто мнимого числа; 2) любого отрицательного числа; 3) любого положительного числа; 4) нуля?
7. Вычислить:
   1. ;
   2. ;
8. Выполнить действия:
   1. ;
   2. ;
   3. ;
   4. ;
   5. ;
   6. ;
   7. ;
   8. .
9. Представить в тригонометрической форме числа:
   1. 2;
   2. ;
   3. ;
   4. .
10. Представить в алгебраической форме числа:
    1. ;
    2. ;
    3. ;
    4. .
11. Выполните действия:
    1. ;
    2. ;
    3. ;
    4. ;
    5. ;
    6. ;
    7. ;
    8. ;
    9. ;
    10. ;
    11. ;
    12. .
12. Представив числа и в показательной форме, вычислите:
    1. ;
    2. ;
    3. ;
    4. ;
    5. ;
    6. .
13. Решите уравнения:
    1. ;
    2. ;
    3. ;
    4. ;
    5. ;
    6. .
14. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:
    1. ;
    2. ;
    3. ;
    4. ;
    5. .

***контрольная работа***

Вариант 1

1. Вычислите .
2. Для числа :
   1. постройте точки на координатной плоскости ;
   2. найдите ; ;
   3. найдите модуль и аргумент числа ;
   4. запишите число в тригонометрической и показательной формах.
3. Выполните действия: .
4. Для числа найдите в тригонометрической и показательной формах.
5. Решить уравнение на множестве комплексных чисел: .
6. Найдите действительные числа x и y так, чтобы выполнялось равенство: 3.
7. Изобразить на координатной плоскости множество всех точек z, удовлетворяющих условию: , 𝐼m.

Вариант 2

1. Вычислите .
2. Для числа :
   1. постройте точки на координатной плоскости ;
   2. найдите ; ;
   3. найдите модуль и аргумент числа ;
   4. запишите число в тригонометрической и показательной формах.
3. Выполните действия: .
4. Для числа найдите в тригонометрической и показательной формах.
5. Решить уравнение на множестве комплексных чисел: .
6. Найдите действительные числа x и y так, чтобы выполнялось равенство: 3.
7. Изобразить на координатной плоскости множество всех точек z, удовлетворяющих условию: ; .

Вариант 3

1. Вычислите .
2. Для числа :
   1. постройте точки на координатной плоскости ;
   2. найдите ; ;
   3. найдите модуль и аргумент числа ;
   4. запишите число в тригонометрической и показательной формах.
3. Выполните действия: .
4. Для числа найдите в тригонометрической и показательной формах.
5. Решить уравнение на множестве комплексных чисел: .
6. Найдите действительные числа x и y так, чтобы выполнялось равенство: (.
7. Изобразить на координатной плоскости множество всех точек z, удовлетворяющих условию: .

Вариант 4

1. Вычислите .
2. Для числа :
   1. постройте точки на координатной плоскости ;
   2. найдите ; ;
   3. найдите модуль и аргумент числа ;
   4. запишите число в тригонометрической и показательной формах.
3. Выполните действия: .
4. Для числа найдите в тригонометрической и показательной формах.
5. Решить уравнение на множестве комплексных чисел: .
6. Найдите действительные числа x и y так, чтобы выполнялось равенство:

(.

1. Изобразить на координатной плоскости множество всех точек z, удовлетворяющих условию: .

***Методические рекомендации***

***по выполнению контрольной работы***

Основные задачи выполняемой работы:

1) закрепление полученных ранее теоретических знаний;

2) выработка навыков самостоятельной работы;

3)выяснение подготовленности студента к решению практических задач с применением темы «Комплексные числа» на спец.дисциплинах.

Работа представлена в 4 вариантах. Варианты 1 и 2 сложнее, чем варианты 3 и 4 и предназначены для сильных студентов.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Критерии оценок*** | |
| ***Количество правильно***  ***решённых задач*** | ***оценка*** |
| менее 3 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 - 7 | 5 |

***литература***

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для средних специальных учебных заведений/Н.В.Богомолов.-М.: Высш.шк., 2009.
2. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. -3.-изд.- М.: Айрис-пресс, 2003.
3. Нахман А.Д. Комплексные числа и элементарные функции комплексного переменного: Метод. пособие.- Тамбов, ТОПКРИО, 2007.
4. Сатина Т.Е., Нахман А.Д. Реализация компетентностного подхода при изучении темы «Комплексные числа»: Метод. пособие.- Тамбов, изд-во ТОИПКРО, 2009.
5. <http://ru.wikipedia.org/wiki/>
6. <http://um-razum.ru/load/uchebnye_prezentacii/matematika/>